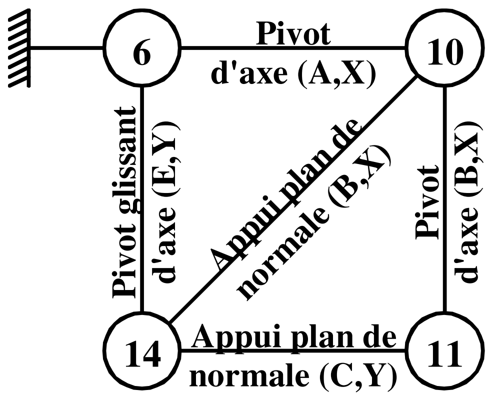
Corrigé du devoir de mécanique N°1

Exercice 1 : Micromoteur

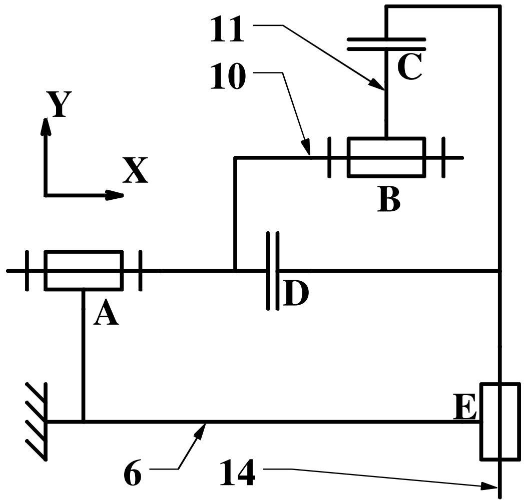
1.1- Classes d'équivalence :

{1} = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}   {10} = {10}   {11} = {11}   {14} = {12,13,14}

1.2- Graphe des liaisons



1.3- Schéma cinématique minimum



Exercice 2 : Skip de levage

2.1- Le poids $\overrightarrow{P}$ est une force appliquée en I.   Donc : $\{T(\overrightarrow{P})\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{P} \end{Bmatrix}$

Avec : $\overrightarrow{AI}\left| \begin{matrix} 1,75+0,38 = 2,13 \text{ m} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ et $\overrightarrow{P}\left| \begin{matrix} -5\,000.\cos 75 = -1\,294 \text{N} \\ -5\,000.\sin 75 = -4\,830 \text{ N} \\ 0 \end{matrix} \right.$

D'où : $\mathbf{\{T(\overrightarrow{P})\} = {}_A\begin{Bmatrix} -1\,294 \text{ N} & 0 \\ -4\,830 \text{ N} & 0 \\ 0 & -10\,290 \text{ N.m} \end{Bmatrix}}$

2.2- Les degrés de liberté des liaisons en A et B sont : $\begin{vmatrix} 0 & R_X \\ T_Y & 0 \\ T_Z & R_Z \end{vmatrix}$

On en déduit les torseurs des actions de liaison en A et B :

$$\{TA\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ 0 & M_A \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{TB\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & M_B \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Le problème étant un problème plan ($\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$) on a : $\{TA\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ et $\{TB\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Ces deux actions de liaison sont donc des forces $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ de supports (A, $\overrightarrow{X}$) et (B, $\overrightarrow{X}$).

2.3- On isole le système S = {3,4,5}, les actions extérieures appliquées sur ce système sont:

- Poids du wagonnet : Force $\overrightarrow{P}$ verticale vers le bas appliquée en I et de module $\|\overrightarrow{P}\|$ = 5000 N
- Action de 1 sur 5 : Force $\overrightarrow{F_A}$ de support $(A, \overrightarrow{X})$
- Action de 1 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_B}$ de support $(B, \overrightarrow{X})$
- Action de 2 sur 3 : Force $\overrightarrow{F_C}$ de support $(C, \overrightarrow{Y})$

<u>Exprimons les torseurs de ces actions en A</u>

$$\mathbf{\{T(\overrightarrow{P})\}} = {}_A\begin{Bmatrix} \mathbf{-1\,294\ N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-4\,830\ N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-10\,290\ N.m} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{\{TA\}} = {}_A\begin{Bmatrix} \mathbf{X_A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{TB\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_B} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_B} \end{Bmatrix} \quad \text{Or : } \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 0 \\ -0{,}9\ m \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et : } \overrightarrow{F_B}\begin{vmatrix} X_B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{Donc : } \mathbf{\{TB\}} = {}_A\begin{Bmatrix} \mathbf{X_B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0{,}9.X_B} \end{Bmatrix}$$

$$\{TC\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_C} \\ \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_C} \end{Bmatrix} \quad \text{Or : } \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 0{,}38\ m \\ -1{,}62\ m \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et : } \overrightarrow{F_C}\begin{vmatrix} 0 \\ Y_C \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{Donc : } \mathbf{\{TC\}} = {}_A\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y_C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0{,}38.Y_C} \end{Bmatrix}$$

<u>Le système étant en équilibre :</u> $\{T(\overrightarrow{P})\} + \{TA\} + \{TB\} + \{TC\} = \{0\}$

$$\text{Soit: } \begin{vmatrix} -1\,294 + X_A + X_B = 0 \\ -4\,830 + Y_C = 0 \\ -10\,290 + 0{,}9.X_B + 0{,}38.Y_C = 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Soit encore : } \begin{vmatrix} X_A = -8\,100\ N \\ X_B = 9\,394\ N \\ Y_C = 4\,830\ N \end{vmatrix}$$

Les actions sont donc :

- **En A une force $\overrightarrow{F_A}$ de support $(A, \overrightarrow{X})$ vers la gauche et de module $\|\overrightarrow{F_A}\|$ = 8 100 N**
- **En B une force $\overrightarrow{F_B}$ de support $(B, \overrightarrow{X})$ vers la droite et de module $\|\overrightarrow{F_B}\|$ = 9 394 N**
- **En C une force $\overrightarrow{F_C}$ de support $(C, \overrightarrow{Y})$ vers le haut et de module $\|\overrightarrow{F_C}\|$ = 4 830 N**

Exercice 3 : Porte de coffre fort

3.1- La liaison entre en B est une liaison rotule donc les degrés de liberté sont:

$$\begin{vmatrix} 0 & R_X \\ 0 & R_Y \\ 0 & R_Z \end{vmatrix} \qquad \text{On en déduit le torseur de l'action en B : } \{TB\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}$$

Ce torseur étant un glisseur d'axe passant par B, cette action peut être modélisée par une force $\overrightarrow{F_B}$ appliquée en B.

3.2- La liaison en A est une liaison linéaire annulaire d'axe $(A, \overrightarrow{Z})$ donc les degrés de liberté sont:

$$\begin{vmatrix} 0 & R_X \\ 0 & R_Y \\ T_Z & R_Z \end{vmatrix} \qquad \text{On en déduit le torseur de l'action en A : } \{TA\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Ce torseur est un glisseur d'axe passant par A. Cette action peut donc être modélisée par une force $\overrightarrow{F_A}$ appliquée en A. De plus la composante suivant $\overrightarrow{Z}$ de cette force est nulle ($Z_A = 0$) donc cette force est horizontale.

3.3- On isole le système S = {1,2}, les actions extérieures appliquées sur ce système sont:

- Poids de 1 : Force $\overrightarrow{P_1}$ de support (G_1, $\overrightarrow{Z}$) vers le bas et de module $\|\overrightarrow{P_1}\| = 10$ kN.
- Poids de 2 : Force $\overrightarrow{P_2}$ de support (G_2, $\overrightarrow{Z}$) vers le bas et de module $\|\overrightarrow{P_2}\| = 20$ kN.
- Action de 0 sur 1 en B : Force $\overrightarrow{F_B}$ appliquée en B.
- Action de 0 sur 1 en A : Force horizontale $\overrightarrow{F_A}$ appliquée en A.

<u>Exprimons les torseurs de ces actions en B.</u>

$$\mathbf{\{TB\}} = {}_{\mathbf{B}}\begin{Bmatrix} \mathbf{X_B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y_B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z_B} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{TA\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_A} \\ \\ \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_A} \end{Bmatrix} \quad \text{Or: } \overrightarrow{BA} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}8 \text{ m} \end{vmatrix} \quad \text{et: } \overrightarrow{F_A} \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{Donc: } \mathbf{\{TA\}} = {}_{\mathbf{B}}\begin{Bmatrix} \mathbf{X_A} & \mathbf{-1{,}8.Y_A} \\ \mathbf{Y_A} & \mathbf{1{,}8.X_A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{T(\overrightarrow{P_1})\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{P_1} \\ \\ \overrightarrow{BG_1} \wedge \overrightarrow{P_1} \end{Bmatrix} \quad \text{Or: } \overrightarrow{BG_1} \begin{vmatrix} 0{,}19 \text{ m} \\ 0{,}3 \text{ m} \\ 0{,}9 \text{ m} \end{vmatrix} \quad \text{et: } \overrightarrow{P_1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \text{ kN} \end{vmatrix} \quad \text{Donc: } \mathbf{\{T(\overrightarrow{P_1})\}} = {}_{\mathbf{B}}\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3 \text{ kN.m}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1{,}9 \text{ kN.m}} \\ \mathbf{-10 \text{ kN}} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{T(\overrightarrow{P_2})\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{P_2} \\ \\ \overrightarrow{BG_2} \wedge \overrightarrow{P_2} \end{Bmatrix} \quad \text{Or: } \overrightarrow{BG_2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1{,}2 \text{ m} \\ 0{,}9 \text{ m} \end{vmatrix} \quad \text{et: } \overrightarrow{P_2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \text{ kN} \end{vmatrix} \quad \text{Donc: } \mathbf{\{T(\overrightarrow{P_2})\}} = {}_{\mathbf{B}}\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-24 \text{ kN.m}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-20 \text{ kN}} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

<u>Le système étant en équilibre :</u> $\{TA\} + \{TB\} + \{T(\overrightarrow{P_1})\} + \{T(\overrightarrow{P_2})\} = \{0\}$

$$\text{Soit : } \begin{vmatrix} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_B - 10 - 20 = 0 \\ -1{,}8.Y_A - 3 - 24 = 0 \\ 1{,}8\ X_A + 1{,}9 = 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Soit encore : } \begin{vmatrix} X_A = -1{,}06 \text{ kN} \\ Y_A = -15 \text{ kN} \\ X_B = 1{,}06 \text{ kN} \\ Y_B = 15 \text{ kN} \\ Z_B = 30 \text{ kN} \end{vmatrix}$$

On en déduit les forces en A et B

$$\mathbf{\overrightarrow{F_A}} \begin{vmatrix} \mathbf{-1{,}06 \text{ kN}} \\ \mathbf{-15 \text{ kN}} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{\overrightarrow{F_B}} \begin{vmatrix} \mathbf{1{,}06 \text{ kN}} \\ \mathbf{15 \text{ kN}} \\ \mathbf{30 \text{ kN}} \end{vmatrix}$$