

Modélisation des actions mécaniques

1- Généralité

1.1- Définition

Un solide 1 exerce une action mécanique sur un solide 2 lorsque le solide 1 a tendance à mettre en mouvement le solide 2.

Remarques :

- Si le solide 1 exerce une action sur le solide 2, cela ne signifie pas que le solide 1 mettra le solide 2 en mouvement. Il peut exister une (plusieurs) autre(s) action(s) qui s'oppose(nt) à la première action et donc qui empêche(nt) la mise en mouvement du solide 2.

- Une action mécanique peut également être exercée par et/ou sur un fluide (liquide ou gaz).

1.2- Conséquence

Le solide 2 ayant 6 degrés de liberté (6 possibilités de se mouvoir dans l'espace), l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 a 6 composantes :

- Trois composantes caractérisant la capacité de l'action à faire translater le solide 2.
- Trois composantes caractérisant la capacité de l'action à faire tourner le solide 2.

1.3- Réciprocité des actions : Principe des actions mutuelles

Si le solide 1 exerce une action mécanique sur le solide 2 alors le solide 2 exerce une action mécanique sur le solide 1 qui lui est directement opposée.

2- Modélisation par une force ou un couple

Toute action mécanique exercée par un solide 1 sur un solide 2 peut se modéliser :

Soit par une force

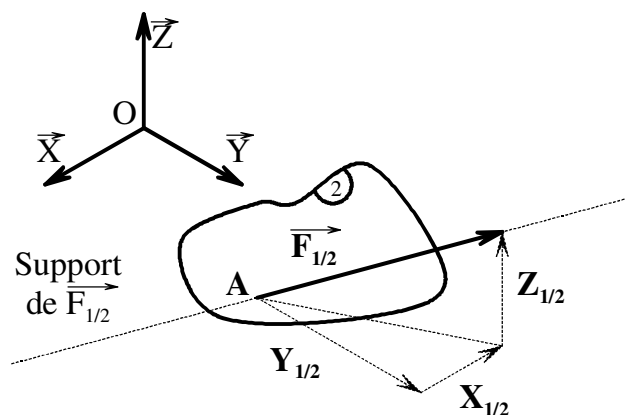
Soit par un couple.

2.1- Force

Si l'action du solide 1 sur le solide 2 est modélisée par une force alors cette force se caractérise par :

- Son vecteur force
- Son point d'application

Si $\vec{F}_{1/2}$ est appliquée en A alors :

$$\begin{pmatrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{pmatrix}$$


- $X_{1/2}$, $Y_{1/2}$ et $Z_{1/2}$ caractérisent respectivement les capacités qu'a le solide 1 à faire translater le solide 2 suivant les axes $\vec{X}$, $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$
- La capacité du solide 1 à faire tourner le solide 2 autour du point A est nulle.

2.1.1- Unité

L'unité de la norme du vecteur force (du module de la force) est le **Newton (Symbole : N)**.

Une force de module 1 N est une force équivalente au poids d'une masse d'environ 100 grammes.

2.1.2- Support d'une force

Le support d'une force est la droite parallèle au vecteur force passant par le point d'application.

2.1.3- Propriété

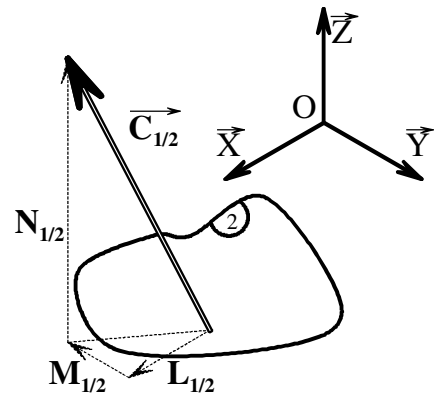
Deux forces ayant même vecteur force et même support sont parfaitement équivalentes (égales).

2.2- Couple

Si l'action du solide 1 exercée sur le solide 2 à une capacité à faire translater le solide 2 nulle et une capacité à faire tourner le solide 2 non nulle, alors cette action ne peut pas se modéliser par une force. Elle peut alors se modéliser par un couple qui se caractérise par :

- Son vecteur couple
- Sa capacité à faire translater l'objet nulle.

$$\text{Si } \vec{C}_{1/2} \begin{vmatrix} L_{1/2} \\ M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{vmatrix} \text{ alors :}$$



$L_{1/2}$, $M_{1/2}$ et $N_{1/2}$ caractérisent respectivement les capacités qu'a le solide 1 à faire tourner le solide 2 autour des axes $\vec{X}$, $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$

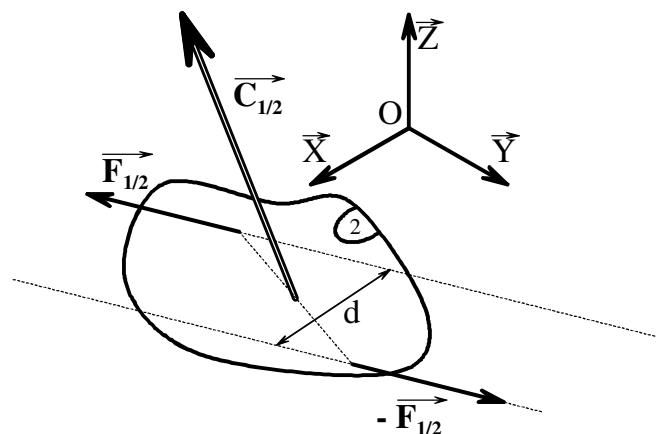
2.2.1- Unité

L'unité de la norme du vecteur couple (module du couple) est le **Newton.mètre (Symbole : N.m)**.

2.2.2- Couple de forces

Deux forces de vecteurs opposés (Même direction même norme mais sens opposés) ayant des supports différents définissent un couple.

Si un couple $\vec{C}_{1/2}$ est défini par deux forces $\vec{F}_{1/2}$ et $-\vec{F}_{1/2}$ de vecteurs opposés , alors ce couple ne dépend que des deux vecteurs forces et de la distance entre les supports des deux forces. Il ne dépend pas des deux points d'application des forces.



Le vecteur couple $\vec{C}_{1/2}$ est un vecteur :

- De direction orthogonale au plan défini par les deux supports des forces $\vec{F}_{1/2}$ et $-\vec{F}_{1/2}$
- De norme $\|\vec{C}_{1/2}\| = d \cdot \|\vec{F}_{1/2}\|$ où d est la distance entre les deux supports des forces $\vec{F}_{1/2}$ et $-\vec{F}_{1/2}$

3- Modélisation par un torseur

Toute action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 peut se modéliser par un torseur.

3.1- Définition

Si une action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 est modélisée par le torseur exprimé en A :

$$\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}_A \text{ alors :}$$

- $X_{1/2}$, $Y_{1/2}$ et $Z_{1/2}$ caractérisent respectivement les capacités qu'a le solide 1 à faire translater le solide 2 suivant les axes $\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$ et $\overrightarrow{Z}$
- $L_{1/2}$, $M_{1/2}$ et $N_{1/2}$ caractérisent respectivement les capacités qu'a le solide 1 à faire tourner le solide 2 autour des axes $(A, \overrightarrow{X})$, $(A, \overrightarrow{Y})$ et $(A, \overrightarrow{Z})$

3.2- Eléments de réduction

Le torseur de l'action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 se caractérise en A par deux vecteurs appelés éléments de réduction en A :

- La résultante : $\overrightarrow{R} \left| \begin{array}{l} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{array} \right.$ caractérisant la capacité à faire translater le solide 2.

- Le moment en A : $\overrightarrow{M}_A \left| \begin{array}{l} L_{1/2} \\ M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{array} \right.$ caractérisant la capacité à faire tourner autour de A le solide 2.

Le torseur de l'action peut alors s'écrire : $\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}_A$ ou $\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_A \end{Bmatrix}_A$

3.2- Transport du torseur : Formule de Varignon (mathématicien du XVIII^{ème})

Si un torseur peut s'exprimer en A par ses deux éléments de réduction : $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}_A$, alors il peut s'exprimer en B par les deux éléments de réduction $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}_B$ tel que :

$$\overrightarrow{M}_B = \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

Cette formule du transport du moment caractérise le fait que, la capacité qu'a l'action mécanique à faire tourner le solide autour du point A, est différente de celle qu'elle a de faire tourner le solide autour du point B même si ces deux capacités sont liées.

Le torseur de l'action peut alors s'écrire :

$$\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_B \end{Bmatrix}_B$$